代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.134-148

On compact complex 3-folds with lines

加藤昌英 (上智大 理工)

§0. 3次元compact複素多様体が，非特異有理曲線を含み，その非特異有理曲線は，$\mathbb{P}^3$の中の射影直線の近傍と正則同型な近傍を持つとする。本稿において我々はこのような非特異有理曲線を含む3次元compact複素多様体を考察する。

微分位相幾何学においては，連結和とか，球面改変と呼ばれる多様体の改変操作があって，複雑な多様体を構成したり，複雑な多様体を単純な多様体に分割したりするために重要な役割を果して来た。複素多様体の圏においては，このような改変は一般には不可能であるが，上記の様な特別な複素多様体の間では連結和によく似た操作を考える事が出来，いくつかの新しい多様体を構成出来る。以下，この事を主に解説する。最後の節で，このような多様体の例について述べる。

§1. 基本的な定義

$\mathbb{C}$ 上の3次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ 上に斉次座標 $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ を1つとる。任意の $r>0$ に対し

$$U_r = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^3 : |z_0|^2+|z_1|^2 < r(|z_2|^2+|z_3|^2)\}$$

$$U = U_1$$

とおく。以下 U はこの意味だけに用いるとする。U_r 内の射影直線 l_1 を

$$l_1 : \quad z_0 = z_1 = 0$$

で定義する。次はやさしい。

Lemma 1. 任意の $r>0$ に対し U_r は U と正則同型である。さらに $\lim_{r\to 0} U_r = l_1$.

Definition 1 [4]. 3次元複素多様体（以下 3-fold と書く）X が Class L であるとは，X が U と正則同型な領域を含むことである。

Definition 2. 3-fold X の中の非特異有理曲線 C が line であるとは，C のある近傍から U 上への正則同型 i があって $i(C)$ が $\mathbb{P}^3$ の射影直線

になることを言う。

定義によれば，Class L の 3-fold は無限本の line を持つ。局所的には，line は 4 つの complex parameter で parametrize されている。明らかに $\mathbb{P}^3$ は Class L に属し，その射影直線は line である。

さて，連結和 (connected sum) と同様な改変操作を説明するために，$\mathbb{P}^3$ の involution σ を次の様に定義する：

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & \mathbb{P}^3 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & \Psi & & \Psi \\ & [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] & \longmapsto & [z_2 : z_3 : z_0 : z_1] \end{array}$$

任意の $\varepsilon > 1$ に対し

$$N(\varepsilon) = U_\varepsilon - \overline{U_{1/\varepsilon}} \quad (\ \overline{}\ は閉包をとることを示す)$$

とおく。$\Sigma = \partial U$ とする。次の lemma もすぐ示せる。

<u>Lemma</u> 2. 任意の $\varepsilon > 1$ に対し，次が成立する。

(i) $\Sigma \subset N(\varepsilon)$,　(ii) $\sigma(\Sigma) \subset \Sigma$,

(iii) $\sigma(N(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$, (iv) $\sigma(U) = \mathbb{P}^3 - \overline{U}$.

さて Class L の 3-fold X_1, X_2 を考える。Lemma 1 によって正則な開いた埋め込み写像

$$i_\nu : U_\varepsilon \longrightarrow X_\nu \qquad \nu = 1, 2,$$

が存在する。

$$X_\nu^\# = X_\nu - \overline{i_\nu(U_{1/\varepsilon})}$$

とおき、合併集合

$$X_1^\# \cup X_2^\#$$

において点 $x_1 \in i_1(N(\varepsilon)) \subset X_1^\#$ と点 $x_2 \in i_2(N(\varepsilon)) \subset X_2^\#$ とを $i_2^{-1}(x_2) = \sigma \circ i_1^{-1}(x_1)$ である時に限って同一視する。これによって新しい 3-fold $X_1^\# \cup X_2^\#$ を得る。これは $N(\varepsilon)$ と正則同型な領域を含むから Class L に属する。さらに X_1, X_2 が compact であれば、$X_1^\# \cup X_2^\#$ も compact である。以後 $X_1^\# \cup X_2^\#$ を $X_1 \# X_2$, $X(X_1, X_2, i_1, i_2)$ 等と書き X_1, X_2 から $X_1 \# X_2$ を構成する上記の操作を連結操作 (connecting operation) と呼ぶ。

一般に $X_1 \# X_2$ の複素構造は i_1, i_2 のとり方に依る。

注意 1. connecting operation は任意の奇数次元の場合に拡張することが出来る。特に 1 次元の

場合は非常に簡単になり、任意の compact Riemann 面は $\mathbb{P}^1$ と elliptic curve とから connecting operation によって構成出来る。

<u>Definition</u> 3. Class L の compact 3-fold X が <u>primary</u> であるとは、ある 2 つの Class L の 3-fold X_1, X_2 に対し $X \cong X_1 \# X_2$ ならば、$X_1 \cong \mathbb{P}^3$ 又は $X_2 \cong \mathbb{P}^3$ が成立することを言う。

ここで $\cong$ は正則同型をあらわす。

§2 不変量

Class L の compact な 2 つの 3-fold を X_1, X_2 とし、$X \cong X_1 \# X_2$ とする。この時、次が成立する。

<u>Proposition</u> 1 q 次元 Betti 数を b_q であらわすと

(i) $b_q(X) = b_q(X_1) + b_q(X_2) - 1$ q : even

(ii) $H_q(X, \mathbb{Z}) \cong H_q(X_1, \mathbb{Z}) \oplus H_q(X_2, \mathbb{Z})$ q : odd

Proposition 2. 正則 p-型式, $0 \leq p \leq 3$, の芽のなす層を Ω^p とすると

$$\dim H^1(X, \Omega^p) = \begin{cases} \dim H^1(X_1, \Omega^p) + \dim H^1(X_2, \Omega^p), & p \neq 1 \\ \dim H^1(X_1, \Omega^1) + \dim H^1(X_2, \Omega^1) - 1 \end{cases}$$

Proposition 1 の証明は, Mayer-Vietoris sequence からすぐに出来る。Proposition 2 は Mayer-Vietoris sequence と Riemann-Roch-Hirzebruch の公式, 及び Chern number の関係式

$$c_I[X] = c_I[X_1] + c_I[X_2] - c_I[\mathbb{P}^3]$$

を使って証明される。

§3 Class L の 3-fold の基本的性質

まず, 次の事実は Fujiki [3] の結果とあわせると, compact Kähler 3-fold で Class L であるものは非常に限られたものであることを示している。

Proposition 3. X を Class L に属する compact 3-fold とする。X はある line l を含み, l に対応す

る Barlet space 上の点 l^* は，Barlet space の中の compact な既約成分上にあると仮定する。このとき，X は unirational である。

証明は Campana の定理 [2, P58 Théorem] を用いればやさしい（直接証明も困難ではない）。

<u>Theorem</u> 1. X_1, X_2 を Class L の compact な 3-fold とする。このとき $X_1 \# X_2 \cong X_1$ であることと $X_2 \cong \mathbb{P}^3$ であることは同値。

証明の "$X_2 \cong \mathbb{P}^3 \Rightarrow X_1 \# X_2 \cong X_1$" の部分には，次の事実を使う。

<u>Lemma</u> 3. $\mathbb{P}^3$ の領域を V とし，U から V の上への正則写像 $\varphi: U \longrightarrow V$ で，U 上いたるところ局所同型なものがあると仮定する。このとき φ は双正則写像であって，射影変換群 PGL(3) の元に拡張することが出来る。

このことから、自然な包含写像 $i: X_1^{\#} \longrightarrow X_1 \# X_2$ が X_1 と $X_1 \# X_2$ との正則同型に拡張出来ることがわかる。逆に "$X_1 \# X_2 \cong X_1 \Rightarrow X_2 \cong \mathbb{P}^3$" の証明は，まず Mayer-Vietoris sequence と local cohomology を組みあわせて $H^0(X_2, -mK) \cong H^0(X_1^{\#} \cap X_2^{\#}, -mK)$ を示す。ただし K は canonical line bundle, m は非負の整数。ここで $X_1^{\#} \cap X_2^{\#} \cong N(\varepsilon)$ に注意すると $H^0(X_1^{\#} \cap X_2^{\#}, -mK) \cong H^0(N(\varepsilon), -mK) \cong H^0(\mathbb{P}^3, -mK)$ であるから，X_2 の代数次元は 3 である。一方 Proposition 1 及び 2 より $H^1(X_2, \Theta) = 0$，$H^1(X_2, \mathcal{O}^*) \cong H^2(X_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を得る。これと $m=1$ の時の等式 $H^0(X_2, -K) \cong H^0(N(\varepsilon), -K)$ とから X_2 上のある effective divisor D が存在して $H^0(X_2, [D]) \cong H^0(N(\varepsilon), [D \cap N(\varepsilon)])$ かつ $K_{X_2} = -4D$ となることを示す。最後に complete linear system $|D|$ は base point を持たぬことを言えば，この linear system によって X_2 から $\mathbb{P}^3$ への正則同型が与えられることを示すのはやさしい。(当シンポジウム中に $|D|$ が base point を持たぬことが森重文氏のヒントにより証明することが出来た

ここに氏とシンポジウムの主催者に感謝する。)

§4. line の動く範囲

X を Class L の 3-fold とする。ℓ を X の line とし B を ℓ に対応する点 ℓ^* を含む Barlet space の既約成分とする。$t \in B$ に対し ℓ_t で対応する X の cycle を表わす。

$$\Omega = \Omega(\ell) = \bigcup_{\substack{t \in B \\ \ell_t : \text{line}}} |\ell_t| , \quad |\ell_t| = \text{supp}.\ \ell_t$$

とおき Ω を line ℓ の <u>動く範囲</u>という。

<u>Theorem 2</u>. Ω は (flat holomorphic) $PGL(3)$-structure をもつ。

従って もし, $\Omega = X$ なら X は $PGL(3)$-structure を持つ。一般に Ω が X の中でどの様な部分を占めるかは、全然わからない。知られている例については (B が compact でないときも込めて) いつも $X - \Omega$ が analytic subset になっている。Theorem 2 の証明は, B の中で line に対応する点の

全体が、弧状連結であることを示し Lemma 3 を使って出来る。

§5. PGL(3)-structure と primarity の判定条件

前節の Theorem 2 によって、PGL(3)-structure を持つ Class L の 3-fold を考えることは意味がある。

<u>Proposition</u> 4. Class L の 3-fold は高々1つの PGL(3)-structure しかもたない。

証明は Lemma 3 からすぐ出来る。

<u>Proposition</u> 5. X_1, X_2 を Class L の 3-fold とする。$X_1 \# X_2$ が PGL(3)-structure を持つことと X_1, X_2 がともに PGL(3)-structure を持つことは、同値である。

次に primarity の判定条件を PGL(3)-structure を持つ場合に、2つ述べる。後者は、前者の特別な場合であるが、有用な事実を含んでいる。

X は $PGL(3)$-structure をもつ 3-fold とする。
この $PGL(3)$-structure によって X の基本群の表現

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow PGL(3)$$

が得られる。$G = \pi_1(X)/\mathrm{Ker}\,\rho$ とおき $\bar{\rho} : G \to PGL(3)$ を ρ によって、標準的に定義される群の準同型とする。さて、才1の primarity の判定条件は：

<u>Theorem</u> 3. X を Class L の compact 3-fold で $PGL(3)$-structure を持つものとする。もし G の有限指数の部分群 G_0 と、$\mathbb{P}^3$ の中の射影平面 H とが存在して任意の $g \in G_0$ に対し $\bar{\rho}(g)(H) = H$ が成立するならば、X は primary である。

才2の判定条件は次の通り。

<u>Theorem</u> 4. X を Class L の compact 3-fold で $PGL(3)$-structure を持つものとする。もし X 上に、定数でない有理型函数が存在すれば X は primary である。

Theorem 3 の証明については、説明を略す。Theorem 4 は、Theorem 3 の条件が自動的に満たされることを示すことによって証明される。それには、まず、X 上の定数でない有理型函数から、自然な方法で、$\bar{\rho}(G)$-不変な $\mathbb{P}^3$ 上の有理函数がつくれることに注意して、次の lemma を使えばよい。

<u>Lemma</u> 4. $\bar{\rho}(G)$ は、有限生成の $PGL(3)$ の部分群で、無限群であるとする。もし $\mathbb{P}^3$ 上に定数でない $\bar{\rho}(G)$-不変な有理函数が存在すれば、G の有限指数の部分群 G_0 と、$\mathbb{P}^3$ のある射影平面 H が存在して、任意の $g \in G_0$ に対して $\rho(g)(H)=H$ となる。

今のところ Lemma 4 の証明は、$\bar{\rho}(G)$ が、必ず無限位数の元を含むという事実を使って、その元の Jordan 標準型の形ごとに直接計算をすることによって、なされている。何かもっと良い証明法はないであろうか？

§5. 例

この節では，Class L の compact 3-fold の例をいくつか述べる。

<u>Example</u> 1. (Blanchard [1, p 166]).

$\mathbb{P}^3$ の中に line

$$\ell_0 = \{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^3 : z_0 = z_1 = 0 \}$$

を考え，$E = \mathbb{P}^3 - \ell_0$ とする。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$

に対し $g_A \in PGL(3)$ を

$$g_A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}, \qquad I = 2 \times 2 \text{ の単位行列}$$

として定義する。今 $GL(2, \mathbb{C})$ の 4 つの元 A_j,

$j = 1, 2, 3, 4$, を 任意の $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}$

に対して

$$\det \left(\sum_{j=1}^{4} x_j A_j \right) \neq 0$$

となるようにとる。例えば (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4)

を $\mathbb{C}^4$ の元で

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \bar{b}_4 \end{pmatrix} \neq 0$$

をみたすようにとり

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -\bar{b}_j & \bar{a}_j \end{pmatrix} \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

と定義すればよい。 $g_j = g_{A_j}$ とおくと $g_j \in \mathrm{Aut}(E)$ であり、 g_1, g_2, g_3, g_4 で生成される $PGL(3)$ の部分群を Γ とおけば、 E/Γ は $PGL(3)$-structure をもつ compact 3-fold. さらに E/Γ は Class L に属し、Theorem 3 又は 4 より primary である。 Blanchard の例のこの様な構成法は井上政久氏から教えていただいた。

Example 2.

$\mathbb{P}^3$ の中に 2 本のねじれの位置にある line

$$l_0 = \{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^3 : z_0 = z_1 = 0 \}$$

$$l_\infty = \{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^3 : z_2 = z_3 = 0 \}$$

を考え、 $W = \mathbb{P}^3 - l_0 - l_\infty$ とおく。 定数 $\alpha \in \mathbb{C}$ を $0 < |\alpha| < 1$ を満す様にとり、 W の正則自己同型 g を

$$g : [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \longrightarrow [z_0 : z_1 : \alpha z_2 : \alpha z_3]$$

によって定義する。 g で生成される無限巡回群を $\langle g \rangle$ とすれば、 $W/\langle g \rangle$ は $PGL(3)$-structure

をもつ compact 3-fold. さらに前と同様に Class L に属し, primary である。

Example 3. [4] の中で構成された compact 3-fold の系列 $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$ は，すべて Class L に属しているが，PGL(3)-structure はもたない。構成法から $n \geq 2$ に対しては，M_n は primary でない。M_1 は primary と思われる。M_n の不変量，及び位相的な構造については [4,5] を参照のこと。

文献

1. Blanchard, M.A. : Sur les variétés analytiques complexes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 73 , 1956, pp. 157-202.
2. Campana, F. : Application de l'espace des cycles à la classification biméromorphe des espaces analytiques Kählériens compacts, Equipe associée d'Analyse Globale n 839, Institut Elie Cartan prepublication (1980).
3. Fujiki, A. : Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14 , 1978, pp. 1-52.
4. Kato, Ma. : Examples of simply connected compact complex 3-folds, Tokyo J. Math., 5, 1982, pp.
5. Kato, Ma. : Examples of symply connected compact complex 3-folds II, to appear.